

❧ PHẦN ĐẠI SỐ ❧

MỤC LỤC	trang
Chương I. BẤT ĐẲNG THỨC	
§1. Bất đẳng thức.....	3
§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn.....	4
§3. Dấu của nhị thức bậc nhất	6
§ 4. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	9
§5. Dấu của tam thức bậc hai.....	10
Ôn tập chương I.....	12
Chương II. THỐNG KÊ	
§1. Bảng phân bố tần số và tần suất.....	14
§2. Số trung bình cộng, số trung vị, mốt.....	19
§3. Phương sai và độ lệch chuẩn.....	22
Ôn tập chương II.....	24
Chương III. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC	
§1. Cung và góc lượng giác.....	26
§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác.....	29
Ôn tập chương III.....	34

CHƯƠNG I. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tính chất bất đẳng thức

- $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$
- $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ với $c > 0$
- $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ với $c < 0$
- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

- $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (\forall a > 0)$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \quad (\forall a > 0)$
- $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\forall a, b \in \mathbb{R})$

Ví dụ 1: Tìm x biết: $|x - 5| \leq 3$

Giải

$$\begin{aligned} |x - 5| \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq x - 5 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cô-Si)

$\forall a \geq 0, b \geq 0$. Ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 2: Cho $a > 0$. Chứng minh: $a + \frac{9}{a} \geq 6$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

$$\text{Vì } a > 0 \text{ và } \frac{9}{a} > 0 \text{ nên ta có: } a + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{9}{a}} = 6$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ (vì } a > 0)$$

❖ **Hệ quả:**

i) x, y cùng dương có tổng không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$;

ii) x, y cùng dương và có tích không đổi thì $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c$ (*)

Giải

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c) \\
 &\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2abc(a+b+c) \\
 &\Leftrightarrow (a^2b^2 + b^2c^2 - 2ab^2c) + (b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc^2) + (c^2a^2 + a^2b^2 - 2a^2bc) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow b^2(a-c)^2 + c^2(a-b)^2 + a^2(b-c)^2 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên).}
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng:

a/ $x^2 - 4x + 7 > 0$

b/ $-x^2 + 2x - 3 < 0$

c/ Với a, b, c là 3 cạnh của tam giác: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$

d/ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Bài 2. Chứng minh rằng, nếu $a > 0, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Bài 3. Chứng minh rằng, nếu $a \geq 0, b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta luôn có :

a/ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

b/ $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Bài 5. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Bài 6. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a/ $a^2 + \frac{1}{4} \geq a$

b/ $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \forall a \geq 0; b \geq 0$

c/ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \forall a, b, c > 0$

d/ $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a+b)$

e/ $(x+y)(xy+1) \geq 4xy, \forall x, y \geq 0$

g/ $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8, \forall a, b, c > 0$

Bài 7. Tìm GTLN- GTNN của hàm số: $f(x) = (x+1)(7-x)$, với $-1 \leq x \leq 7$

Bài 8. Tìm GTLN của hàm số

a/ $f(x) = (2x-1)(3-x)$, với $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

b/ $f(x) = 4x(8-5x)$, với $0 \leq x \leq \frac{8}{5}$

Bài 9. Tìm GTNN của hàm số

a/ $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$, với $x > 1$

b/ $f(x) = x + \frac{2}{3x-1}$, với $x > \frac{1}{3}$

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

Định nghĩa. Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có TXĐ: D_f và D_g . Đặt $D = D_f \cap D_g$. Các mệnh đề: $f(x) > g(x); f(x) < g(x); f(x) \geq g(x); f(x) \leq g(x)$ gọi là *bất phương trình một ẩn*; x là *ẩn số* và D là TXĐ của bất phương trình đó. Số $x_0 \in D$ gọi là *một nghiệm của bất phương trình* $f(x) > g(x)$ nếu $f(x_0) > g(x_0)$.

2. Bất phương trình tương đương

Định nghĩa. Hai bất phương trình cùng ẩn được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.

❖ Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$, ta viết $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$

Ví dụ 1: Với điều kiện $x > 5$, ta có $\frac{7}{x-5} > 1 \Leftrightarrow 7 > x-5 \Leftrightarrow x < 12$

3. Biến đổi tương đương các phương trình

* Cho $f(x) < g(x)$ có TXĐ: D và $h(x)$ xác định trên D ta có :

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) < g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) > 0, \forall x \in D$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) > g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) < 0, \forall x \in D$$

* Cho $f(x) < g(x)$ có TXĐ: D ta có:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2 \text{ nếu } f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in D$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau: $|x-4| \leq |x|$

Giải

$$|x-4| \leq |x| \Leftrightarrow (x-4)^2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \leq x^2 \Leftrightarrow x \geq 2$$

4. Khái niệm hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình một ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

☞ Mỗi giá trị x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi một nghiệm của bất phương trình.

☞ Giải hệ bất phương trình là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG:

1/ Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S = (-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a/ } \sqrt{x-1} > \sqrt{1-x} & \text{b/ } \sqrt{x-2} < 5 + \sqrt{x-2} \\ \text{c/ } x + \frac{2}{x-5} \geq 3 + \frac{2}{x-5} & \text{c/ } \frac{x}{\sqrt{x-2}} \geq \frac{2}{\sqrt{x-2}} \end{array}$$

Bài 2. Trong hai bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình: $2x-1 \geq 0$

$$2x-1 + \frac{6}{x-3} \geq \frac{6}{x-3} \quad \text{và} \quad 2x-1 - \frac{6}{x-3} \geq -\frac{6}{x-3}$$

Bài 3. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm

$$\text{a/ } x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3 \quad \text{b/ } \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2}$$

Bài 4. Giải thích vì sao các bất phương trình sau tương đương

$$\begin{array}{l} \text{a/ } -4x+1 > 0 \quad \text{và} \quad 4x-1 < 0 \\ \text{b/ } 2x^2+5 \leq 2x-1 \quad \text{và} \quad 2x^2-2x+6 \leq 0 \end{array}$$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau

$$\begin{array}{l} \text{a/ } \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4} \\ \text{b/ } (2x-1)(x+3) - 3x+1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5 \end{array}$$

Bài 6. Giải các hệ bất phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a/ } \begin{cases} 5x-2 > 4x+5 \\ 5x-4 < x+2 \end{cases} & \text{b/ } \begin{cases} 2x+1 > 3x+4 \\ 5x+3 \geq 8x-9 \end{cases} \\ \text{c/ } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ -5+x < 0 \\ 5x-4 \geq 0 \end{cases} & \text{d/ } \begin{cases} \frac{5x+2}{3} \geq 4-x \\ \frac{6-5x}{13} < 3x+1 \end{cases} \end{array}$$

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó

Định nghĩa. Nhị thức bậc nhất (đối với x) là biểu thức có dạng: $ax = b$, trong đó a, b là hai số thực cho trước, với $a \neq 0$

Định lý. Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn nghiệm, và trái dấu với hệ số a khi x nhỏ hơn nghiệm của nó.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

Ví dụ 1: Xét dấu nhị thức sau: $f(x) = -2x + 5$

Giải

Nhị thức $f(x) = -2x + 5$ có hệ số $a = -2 < 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x) = -2x + 5$	+	0	-

2. Ứng dụng

2.1. Giải bất phương trình tích

Dạng: $P(x) > 0, P(x) < 0, P(x) \geq 0, P(x) \leq 0$, với $P(x)$ là tích các nhị thức.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(-x + 3) > 0$

Giải

$$\text{Cho } P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
x-1	-	0	+	+	+
x-2	-		-	0	+
-x+3	+		+	+	0
P(x)	+	0	-	0	+

2.2. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

Ví dụ 3: Giải các phương trình: $\frac{3}{x-2} \leq \frac{5}{2x-1}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Bpt} &\Leftrightarrow \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2x-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(2x-1) - 5(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+7}{(x+2)(2x-1)} \leq 0 \end{aligned}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-7	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
x+7	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+
2x-1	-	-	0	-	+
Vết trái	-	0	+	-	+

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; -7] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

2.3. Giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn ở trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải ta dùng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 4: $|x-1| < 2x+5$

Giải

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 2x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ -x+1 < 2x+5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{-4}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{-4}{3} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{-4}{3}$$

Vậy tập nghiệm $S = \left(\frac{-4}{3}; +\infty\right)$

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

1/ Giải bất phương trình: $|x-5| \leq 2x+3$

Giải

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 \leq 2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ -x+5 < 2x+3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \frac{2}{3} \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

BÀI TẬP**Bài 1.** Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a/ $\frac{5-2x}{x+3}$

b/ $\frac{x}{x+2} - 3$

c/ $\frac{x(5x-6)}{4-x}$

c/ $\frac{(x-2)^2(x+5)}{x^2-9}$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử rồi xét dấu

a/ $4x^2 - 5x + 1$

b/ $x^2 - 5(1+\sqrt{2})x + 4 + 5\sqrt{2}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau

a/ $\frac{(4-x)(x+1)}{x+3} \geq 0$

b/ $\frac{5}{x-2} \leq \frac{1}{4-3x}$

Bài 4. Giải các bất phương trình

a/ $(-\sqrt{3}x+2)(x+1)(4x-5) > 0$

b/ $\frac{3-2x}{(3x-1)(x-4)} < 0$

c/ $\frac{-3x+1}{2x+1} \leq -2$

d/ $\frac{x+2}{3x+1} \leq \frac{x-2}{2x-1}$

Bài 5. Giải các hệ bất phương trình

a/ $\begin{cases} (x-3)(\sqrt{2}-x) > 0 \\ \frac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} \frac{2}{2x-1} \leq \frac{1}{3-x} \\ |x| < 1 \end{cases}$

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau

a/ $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Dạng:

$$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \geq 0; ax + by + c \leq 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

* Mỗi cặp (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ gọi là một nghiệm bất phương trình $ax + by + c < 0$

* Nửa mặt phẳng (không kể bờ (d): $ax + by + c = 0$) chứa $M(x_0, y_0)$ là miền nghiệm bất phương trình.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ gọi là *miền nghiệm của hệ*.

BÀI TẬP

Bài 1. Xác định miền nghiệm các bất phương trình sau

a/ $2x - y < 0$

b/ $3x + y - 1 \geq 0$

Bài 2. Xác định miền nghiệm các hệ bất phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y - 1 < 0 \end{cases} \quad b/ \begin{cases} 3x - y < 0 \\ x - 2y + 5 < 0 \\ 5x + 2y + 10 > 0 \end{cases}$$

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa. Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức dạng: $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

* $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \in \mathbb{R}$

* $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \neq -\frac{b}{a}$

* $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số a $\forall x \in (x_1, x_2)$ và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$$* f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$* f(x) = ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 > 0$, $\forall x$ vì $a = 2 > 0, \Delta = 9 - 40 = -31 < 0$

Ví dụ 2: $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$, $\forall x \neq 3$ vì $a = 1 > 0, \Delta' = 0$

Ví dụ 3: Xét dấu $f(x) = x^2 - 7x + 10$

$$a = 1 > 0, f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+

Ví dụ 4: Tìm m để $f(x) = x^2 - 2x - m + 5 > 0$, $\forall x$

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 + m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Ví dụ 5: Tìm m để $f(x) = -x^2 + 2mx - 7m + 6 \leq 0$, $\forall x$

$$f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 - 7m + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 6$$

3. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc dạng: $f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$

Với $f(x) = ax^2 + bx + c$

☞ Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lý về dấu tam thức bậc hai.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $2x^2 - 3x + 1 > 0$

Giải

$$\text{Cho } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$	+	0	-	0	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-	0	-	0
f(x)	+	0	-	0	+	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; +\infty)$.

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Với những giá trị nào của m thì đa thức $f(x) = (2 - m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương với mọi x?

Giải

Với $m = 2$ thì $f(x) = -2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ (không thỏa yêu cầu bài toán)

Với $m \neq 2$, $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - m > 0 \\ \Delta' = m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy với $m < 1$ thì đa thức $f(x)$ luôn dương với mọi x.

Bài 2. Với mọi x, y. Chứng minh rằng: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0$ (*)

Giải

(*) $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2(1 - 2y)x + 5y^2 - 6y + 3 > 0$

Ta có: $\Delta' = (1 - 2y)^2 - (5y^2 - 6y + 3) = -(y - 1)^2 - 1 < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x, y$

Bài 3. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} \leq 2$

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} - 2 \leq 0$

Ta có $\frac{-2x + 7}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$
$-2x + 7$	+	+	0	-	-
$x^2 - 7x + 10$	0	-	-	0	+
f(x)	+	-	0	+	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(2; \frac{7}{2}\right] \cup (5; +\infty)$.

BÀI TẬP

Bài 1. Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a/ $2x^2 - x + 5$

b/ $x^2 - 4x + 4$

c/ $x^2 - 7x + 10$

c/ $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Tìm các giá trị m để mỗi biểu thức sau luôn dương

a/ $2x^2 - x + m - 5$

b/ $(m - 2)x^2 - 2mx + m - 9$

c/ $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$

d/ $x^2 - 2mx + 6m - 5$

Bài 3. Tìm các giá trị m để mỗi biểu thức sau luôn âm

a/ $-5x^2 - x + m + 2$

b/ $(m - 1)x^2 - 2(m - 3)x + m - 5$

c/ $m^2x^2 - 2(m + 1)x + 7$

d/ $-x^2 + 2(m - 5)x - 16$

Bài 4. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 7m - 6}$. Tìm m để hàm số xác định với mọi x.

Bài 5. Giải các bất phương trình sau

a/ $-5x^2 + x + 12 < 0$

b/ $16x^2 + 40x + 25 < 0$

c/ $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$

d/ $x^2 - x - 6 \leq 0$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau

a/ $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$

b/ $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$

c/ $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$

d/ $x^4 - 3x^2 \leq 0$

Bài 7. Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau có nghiệm

a/ $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

b/ $(m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$

Bài 8. Giải các hệ bất phương trình

a/ $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases}$

Bài 9. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm: $x^2 + (m - 2)x - 2m + 3 = 0$

Bài 10. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm với mọi m:

a/ $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$

b/ $(m^2 + 1)x^2 + 2(m + 2)x + 6 = 0$



ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $|a + b| < |1 + ab|$, với $|a| < 1; |b| < 1$

b/ $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, $\forall a, b \geq 0$ khi nào đẳng thức xảy ra?

c/ $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, $\forall a, b, c \geq 0$ khi nào đẳng thức xảy ra?

d/ $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$, $\forall a, b, c > 0$

Bài 2. Cho hai số x, y thoả $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng: $|x + 3y| \leq \sqrt{10}$

Bài 3. Cho $4x - 6y = 1$. Chứng minh rằng: $4x^2 + 9y^2 \geq \frac{1}{8}$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau

$$a/ \frac{x+2}{3x+1} \geq \frac{x-2}{2x-1} \qquad b/ \frac{4x(3x+2)}{2x+5} \leq 0$$

Bài 5. Giải các hệ bất phương trình sau

$$a/ \begin{cases} \frac{2x-5}{x+3} > 1 \\ \frac{3x+4}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x \end{cases} \qquad b/ \begin{cases} \frac{x-4}{2x-3} \leq 5 \\ \frac{(x+4)(7-x)}{2-3x} \geq 0 \end{cases}$$

Bài 6. Giải các hệ bất phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 - 8x + 12 < 0 \\ \frac{(x+1)(7-x)}{2-x} \geq 0 \end{cases} \qquad b/ -1 \leq \frac{10x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 1$$

Bài 7. Định m để hàm số sau xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

$$a/ f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + m + 5} \qquad b/ f(x) = \sqrt{m(m+2)x^2 + 2mx + 2}$$

Bài 8. Cho $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3$. Tìm m để:

$$a/ f(x) < 0 \text{ vô nghiệm} \qquad b/ f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 9. Giải các phương trình sau

$$\begin{array}{ll} a/ |x^2 - 6x + 5| = x + 5 & b/ x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0 \\ c/ |x + 1| + |8 - 3x| = |9 - 2x| & d/ |x - 2| + |x - 3| = 2x - 5 \\ e/ x - \sqrt{x + 1} = 1 & g/ \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2| \\ h/ \sqrt{2x + 1} = 2 + \sqrt{x - 3} & i/ \sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3 \\ k/ \sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x - 2} - \sqrt{2x - 3} & l/ \sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x + 6} = \sqrt[3]{2x + 11} \end{array}$$

Bài 10. Giải các bất phương trình sau

$$\begin{array}{ll} a/ 2|x + 3| > x + 6 & b/ |x^2 + 4x - 12| < x + 5 \\ c/ |x^3 - 8| \geq 2 - x & d/ 4 - x + |3x^2 - 6x| < 2x - 6 \\ e/ \sqrt{x^2 + x - 12} \leq 8 - x & g/ \sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2 \\ h/ \sqrt{x^2 - 7x - 8} \leq x - 6 & i/ \frac{4}{\sqrt{2 - x}} - \sqrt{2 - x} < 2 \end{array}$$

CHƯƠNG II. THỐNG KÊ

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

I. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Thống kê là gì? Thống kê là môn khoa học nghiên cứu về các phương pháp thu thập, tổ chức trình bày, phân tích và xử lý số liệu.

2. Mẫu số liệu

- Một tập hợp con hữu hạn các đơn vị điều tra gọi là *mẫu*.
- Số phần tử của mẫu gọi là *kích thước mẫu*.
- Các giá trị thu thập được trên mẫu được gọi là *mẫu số liệu*.

Ví dụ 1: Điều tra về điểm môn Toán của lớp 10A, người ta chọn ra 12 bạn học sinh ở tổ I và thu được kết quả sau:

9	7	6	5	7	8
7	9	8	4	7	8

Khi đó:

- Dấu hiệu điều tra: điểm môn toán.
- Đơn vị điều tra: lớp 10A.
- Kích thước mẫu: 12.

3. Tần số - Tần suất

- Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là *tần số của giá trị đó*.
- Tần suất f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N .

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

☞ Thường viết tần suất dưới dạng phần trăm (%).

Ví dụ 2: Khi điều tra về năng suất của giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ/ha) của giống lúa đó trên 50 thửa ruộng có cùng diện tích 1ha có mẫu số liệu như sau:

3	4	3	3	3	4	3	3	4	3
0	0	2	4	8	4	0	4	0	2
3	4	4	4	3	3	3	3	3	4
8	0	2	4	6	2	8	6	4	2
3	3	3	3	3	4	4	3	3	4
2	0	8	2	6	0	2	8	8	0
4	3	3	3	3	4	4	3	3	3

2	8	6	0	0	2	2	6	4	6
3	4	4	3	3	3	3	3	4	3
8	0	2	2	6	8	6	8	0	8

Ta thấy: giá trị 30 xuất hiện 5 lần, 32 xuất hiện 6 lần, ...

Thống kê thành một bảng phân bố tần số- tần suất như sau:

☞ **Bảng ngang**

Giá trị (x_i)	30	32	34	36	38	40	42	44	Σ
Tần số (n_i)	5	6	4	8	11	7	7	2	N=50
Tần suất (%)	10	12	8	16	22	14	14	4	100%

☞ **Bảng dọc**

Giá trị (x_i)	Tần số (n_i)	Tần suất (%)
30	5	10
32	6	12
34	4	8
36	8	16
38	11	22
40	7	14
42	7	14
Σ	N=50	100%

4. Bảng phân bố Tần số - Tần suất ghép lớp

Để trình bày mẫu số liệu (theo tiêu chí nào đó) được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, ta ghép số liệu thành các lớp.

Ví dụ 3: Chọn 36 học sinh nam của một trường trung học phổ thông và đo chiều cao của họ ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: cm).

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164
164	164	164	165	165	165	165	165	166	166
166	166	167	167	168	168	168	169	169	170
171	171	172	172	174	168				

Ta có bảng phân bố ghép lớp.

Lớp (x_i)	Tần số (n_i)	Tần suất (%)
[160 ; 162]	6	16,7
[163 ; 165]	12	33,3
[166 ; 168]	10	27,8
[169 ; 171]	5	13,9
[172 ; 174]	3	8,3
Σ	N=36	100%

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW/h) ở khu phố 5, phường 7, quận Tân Bình. Ta chọn ngẫu nhiên 30 gia đình trong khu phố đó và thu được mẫu số liệu sau:

165	85	70	90	100	90	100	75	80	90
120	140	100	70	90	85	75	90	110	120
120	100	90	80	100	75	90	110	90	100

- Đơn vị điều tra là gì?
- Dấu hiệu điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?
- Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

Giải

- Đơn vị điều tra: Khu phố 5, phường 7, quận Tân Bình.
- Dấu hiệu điều tra: Điện năng tiêu thụ trong một tháng ở hộ gia đình.
Kích thước mẫu: 30.
- Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu là: 70; 75; 80; 85; 90; 100; 120; 140; 165.

BÀI TẬP

Bài 1. Để điều tra điểm toán mỗi học sinh khối 10 của một trường THPT, người ta chọn ra 40 học sinh và ghi điểm số của các học sinh đó như sau:

6	7	8	9	7	5	4	7	10	8
8	6	7	8	7	7	8	7	6	7
9	7	5	8	8	5	7	8	7	8
9	6	6	7	7	8	9	10	8	7

Hãy cho biết:

- Đơn vị điều tra, dấu hiệu điều tra, kích thước mẫu;
- Hãy viết các giá trị khác nhau của mẫu số liệu.

Bài 2. Để điều tra về số xe gắn máy trong mỗi gia đình ở quận Tân Bình. Công ty Honda cử nhân viên đến ngẫu nhiên 50 gia đình, thu thập được mẫu số liệu như sau:

1	2	3	2	1	4	3	2	0	1
2	1	3	2	0	1	0	3	2	1
4	1	2	0	1	2	1	1	3	2
1	2	3	4	1	2	2	1	2	2
2	1	1	2	3	4	2	2	1	0

Hãy cho biết:

- Đơn vị điều tra, dấu hiệu điều tra, kích thước mẫu.
- Hãy viết các giá trị khác nhau của mẫu số liệu.

Bài 3. Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW/h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75

- Dấu hiệu điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?
- Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

Bài 4. Để điều tra số con của mỗi gia đình ở địa phương A. Người ta chọn ra 40 gia đình và thống kê số con các gia đình đó được mẫu số liệu:

2	4	3	0	1	2	3	1	0	2
1	1	3	1	2	0	1	2	1	1
2	2	3	1	2	1	2	1	3	4
4	1	0	2	1	2	2	1	1	1

Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất.

Bài 5. Điều tra điểm thi học kỳ I môn toán của khối 10. Người ta chọn ra 50 học sinh và ghi lại điểm như sau:

9	7	5	4	7	8	6	7	8	9
10	7	5	7	7	8	6	6	7	8
9	10	7	6	7	7	8	7	4	5
5	5	8	9	7	9	7	9	7	8
8	8	7	8	7	10	10	7	5	6

Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất.

Bài 6. Trong một giải bóng đá học sinh, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất. Sau đây là số phiếu dự đoán đúng của 25 trận mà ban tổ chức nhận được:

54	75	121	142	154	159	171	189	203	211	225	247	251
259	264	278	290	325	315	322	355	367	388	450	490.	

Hãy lập bảng tần số- tần suất ghép lớp gồm sáu lớp: lớp đầu tiên là đoạn $[50;124]$, lớp thứ hai là đoạn $[125;199]$... (độ dài mỗi đoạn là 74).

Bài 7. Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ô tô đi qua trạm như sau:

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần nghìn) gồm sáu lớp: Lớp đầu tiên là đoạn $[36;43]$, lớp thứ hai là đoạn $[44;51]$, ...(độ dài mỗi đoạn là 7).

§ 2. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG - SỐ TRUNG VỊ - MÓT

I. KIẾN THỨC CẦN BẢN

1. Số trung bình cộng (hay số trung bình)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N}$$

Trong đó $\bar{x}$: giá trị trung bình; N: kích thước mẫu.

☞ Để cho gọn ta viết: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$, đọc là “tổng của các x_i với i chạy từ 1 đến n ”

- Nếu ta có bảng phân bố tần số của m giá trị khác nhau.

Giá trị	x_1	x_2		x_m	Σ
Tần số	n_1	n_2		n_m	N

với ($n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$)

Khi đó, công thức tính số trung bình là:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i$$

- Đối với bảng phân bố tần số ghép lớp, có m lớp:

Ở mỗi lớp, ta xác định giá trị đại diện x_i (là trung điểm của đoạn hay nửa khoảng thứ i), khi đó số trung bình được tính xấp xỉ theo công thức:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i$$

Ví dụ 1. Một nhà thực vật đo chiều dài của 74 lá cây và thu được bản tần số sau (đơn vị: mm).

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
[5,45; 5,85)	5,65	5
[5,85; 6,25)	6,05	9
[6,25; 6,65)	6,45	15
[6,65; 7,05)	6,85	19
[7,05; 7,45)	7,25	16
[7,45; 7,85)	7,56	8
[7,85; 8,25)	8,05	2
Σ		N=74

Khi đó, chiều dài trung bình của 74 lá này xấp xỉ là:

$$\bar{x} \approx \frac{5.5,65 + 9.6,05 + \dots + 8.7,56 + 2.8,05}{74} \approx 6,80(mm)$$

☞ Ý nghĩa số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

2. Số trung vị

- Giả sử ta có mẫu số liệu gồm N số liệu xếp theo thứ tự không giảm.

+ Nếu N lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ gọi là *số trung vị*.

+ Nếu N chẵn thì trung bình cộng của số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và số kế tiếp $\frac{N}{2}+1$ là *số trung vị*.

- Số trung vị kí hiệu: M_e

Ví dụ 2. Điều tra về điểm thi môn tin học của 20 học sinh và sắp thứ tự tăng dần như sau:

6	6	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	9	9	9	9	10	10

Có $N=20$

Số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ là 7; đứng thứ $\frac{N}{2}+1$ là 8.

Vậy số trung vị $M_e = \frac{7+8}{2} = 7,5$

3. Mốt

- Trong bảng phân bố tần số thì giá trị có tần số lớn nhất được gọi là *Mốt*.
- Ký hiệu: M_o

Trong ví dụ trên: điểm 7 xuất hiện nhiều nhất (8 lần), nên $M_o = 7$

☞ **Chú ý:** Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.

BÀI TẬP

Bài 1. Trong một trường THPT, để tìm hiểu tình hình học môn Toán của hai lớp 10A và 10B, người ta cho hai lớp thi môn Toán cùng một đề thi và lập được hai bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Điểm thi môn Toán của lớp 10A

Lớp điểm thi	Tần số
[0; 2)	2
[2; 4)	4
[4; 6)	12
[6; 8)	28
[8; 10)	4
Cộng	50

Điểm thi môn Toán của lớp 10B

Lớp điểm thi	Tần số
[0; 2)	4
[2; 4)	10
[4; 6)	18
[6; 8)	14
[8; 10)	5
Cộng	51

Tính các số trung bình cộng của hai bảng phân bố ở trên và nêu nhận xét về kết quả làm bài thi của hai lớp.

Bài 2. Điều tra tiền lương hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau:

Tiền lương của 30 công nhân xưởng may

Tiền lương (nghìn đồng)	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm mốt của bảng phân bố trên. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

Bài 3. Cho biết tình hình thu hoạch lúa vụ mùa năm 1980 của ba hợp tác xã ở địa phương V như sau: (1ha = 10000 m²)

Hợp tác xã	Năng suất lúa (tạ/ha)	Diện tích trồng lúa (ha)
A	40	150
B	38	130
C	36	120

Hãy tính năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ ba hợp tác xã kể trên.

Bài 4. Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch là: 650, 840, 690, 720, 2500, 670, 3000 (đơn vị: nghìn đồng). Tìm số trung vị của các số liệu thống kê đã cho. Nêu ý nghĩa kết quả đã tìm được.

§3. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. LÝ THUYẾT

1. Phương sai

- Để đo mức độ chênh lệch giữa các giá trị với số trung bình, người ta đưa ra hai số đặc trưng là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*. Ký hiệu là s^2 và s .
- Công thức tính phương sai:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

☞ **Chú ý:** Có thể biến đổi công thức tính phương sai thuận tiện hơn:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

2. Độ lệch chuẩn

- Công thức tính độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

Ví dụ 1. Ở ví dụ 2 của §2, ta có:

- Điểm trung bình của 20 học sinh là:

$$\bar{x} = \frac{2.6 + 8.7 + 4.8 + 4.9 + 2.10}{20} = 7,8$$

- Phương sai: $s^2 = \frac{2.(6-7,8)^2 + 8.(7-7,8)^2 + 4.(8-7,8)^2 + 4.(9-7,8)^2 + 2.(10-7,8)^2}{20} \approx 1,36$

- Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{1,36} \approx 1,17$.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Điều tra về số học sinh của 20 lớp học ở một trường chuẩn ta được mẫu số liệu:

30	35	34	36	32	36	34	35	30	35
31	33	36	34	35	30	35	32	35	35

- Hãy tính số trung bình học sinh mỗi lớp.
- Tính số trung vị và mốt.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

Bảng phân bố tần số

Giá trị	30	31	32	33	34	35	36	
Tần số	3	1	2	1	3	7	3	N = 20

a. Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{3.30 + 1.31 + 2.32 + 1.33 + 3.34 + 7.35 + 3.36}{20} = 33,65$$

b. Số trung vị:

Số đứng vị trí $\frac{N}{2}$ là 34 và $\frac{N}{2} + 1$ là 35.

$$\Rightarrow \text{Số trung vị } M_e = \frac{34+35}{2} = 34,5$$

- Một: Số 35 có tần số lớn nhất là 7 $\Rightarrow M_o = 35$

c. Phương sai

$$s^2 = \frac{3.(30-33,65)^2 + 1.(31-33,65)^2 + 2.(32-33,65)^2 + 1.(33-33,65)^2 + 3.(34-33,65)^2 + 7.(35-33,65)^2 + 3.(36-33,65)^2}{20}$$

$$\approx 4,13$$

- Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{4,13} \approx 2,03$.

BÀI TẬP

Bài 1. Có 100 học sinh tham gia kỳ thi học sinh giỏi môn Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Σ
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N= 100

- Tính số trung bình.
- Tính số trung vị và một. Nêu ý nghĩa của chúng.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 2. Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

- Tìm số xe trung bình bán được trong một ngày.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 3. Cho hai bảng phân bố tần số ghép lớp:

Bảng 1: *Khối lượng của nhóm cá mè thứ I*

Lớp khối lượng (kg)	[0,6 ; 0,8)	[0,8 ; 1,0)	[1,0 ; 1,2)	[1,2 ; 1,4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

Bảng 2: *Khối lượng của nhóm cá mè thứ II*

Lớp khối lượng (kg)	[0,5;0,7)	[0,7 ; 0,9)	[0,9;1,1)	[1,1 ; 1,3)	[1,3;1,5]	Cộng
Tần số	3	4	6	4	3	20

- Tính các số trung bình cộng của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.
- Tính phương sai của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.
- Xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn?

Bài 4. Số liệu sau đây cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2005. (Đơn vị: triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	14	15	17	20	17

- Tìm số trung bình, số trung vị.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 5. Số lượng khách đến tham quan tại một điểm du lịch A trong mỗi tháng được thống kê trong bảng sau đây:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Số khách	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Tìm số trung bình, số trung vị.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.



ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Doanh thu của 8 cửa hàng ăn trong một ngày ở khu phố A (đơn vị: triệu đồng) như sau:

2	2	25	2	10	100	2	10
---	---	----	---	----	-----	---	----

Tìm số trung bình và số trung vị. Số nào đại diện tốt hơn?

Bài 2. Một câu lạc bộ thiếu nhi trong dịp hè có mở 7 lớp ngoại khoá. Sĩ số của các lớp tương ứng là:

43	41	52	13	21	39	46
----	----	----	----	----	----	----

Tìm số trung bình và số trung vị.

Bài 3. Số tiền cước phí điện thoại (đơn vị: nghìn đồng) của 7 gia đình trong khu phố A phải trả được ghi lại như sau :

83 79 92 71 69 83 74

Tính số trung bình, số trung vị, mốt và độ lệch chuẩn.

Bài 4. Người ta phân 400 quả trứng thành năm lớp căn cứ vào khối lượng của chúng (đơn vị: gam). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp	Tần số
[27,5 ; 32,5)	18
[32,5 ; 37,5)	76
[37,5 ; 42,5)	200
[42,5 ; 47,5)	100
[47,5 ; 52,5)	6
	N = 400

- Tính số trung bình
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 5. Một người lái xe thường xuyên đi lại giữa hai địa điểm A và B. Thời gian đi (tính bằng phút) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[40 ; 44]	9
[45 ; 49]	15
[50 ; 54]	30
[55 ; 59]	17
[60 ; 64]	17
[65 ; 69]	12
	N = 100

- Tính thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B.

b. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 6. Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu sau:

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	25	17	21	15	12	18
16	23	14	18	19	16	13	19	18	17

a. Lập bảng phân bố tần số.

b. Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

c. Tính số trung vị và mốt.

Bài 7. Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[50 ; 60)	2
[60 ; 70)	6
[70 ; 80)	10
[80 ; 90)	8
[90 ; 100)	4
	N = 30

a. Tính số trung bình.

b. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

CHƯƠNG III. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1.1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

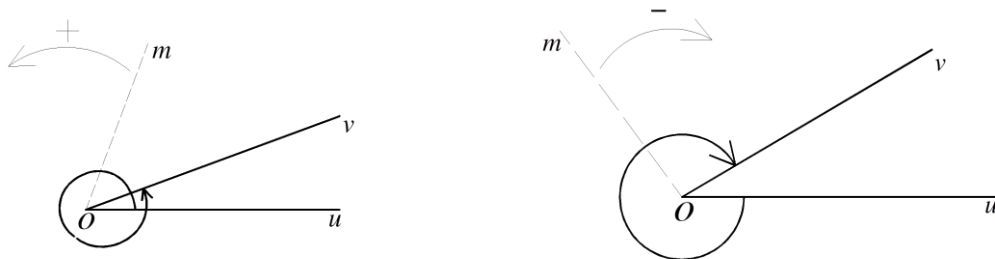
Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.

☞ Ta quy ước: chiều dương là chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

Một điểm M di động trên đường tròn theo một chiều nhất định (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu là A, điểm cuối là B.

Kí hiệu: $\widehat{AB}$

1.2. Góc lượng giác



Cho 2 tia Ou, Ov và tia Om quay quanh O theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov. Ta nói Om quét một góc lượng giác (tia đầu là tia Ou, tia cuối là Ov). Kí hiệu (Ou, Ov)

1.3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Chọn điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc. Đường tròn xác định như trên gọi là **đường tròn lượng giác**.

2. SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

2.1. Độ và radian

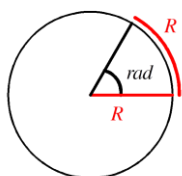
a. Độ: + Đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2\pi R$ và số đo bằng 360° .

+ Cung tròn bán kính R có số đo a° ($0 \leq a^\circ \leq 180^\circ$) thì độ dài $\ell = \frac{\pi a R}{180}$.

Ví dụ 1: + Số đo $\frac{3}{4}$ đường tròn là $\frac{3}{4} \cdot 360^\circ = 270^\circ$.

+ Cung tròn có bán kính R có số đo 72° thì độ dài cung $\ell = \frac{\pi \cdot 72 \cdot R}{180} = \frac{2\pi R}{3}$

b. Radian: Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là **cung có số đo là 1 radian** (1^{rad})



+ Toàn bộ đường tròn có số đo radian là 2π

+ Cung có độ dài ℓ thì số đo radian là $\alpha = \frac{\ell}{R}$

+ Cung tròn bán kính R có số đo α rad thì độ dài: $\ell = \alpha \cdot R$

+ Công thức liên hệ giữa độ và radian: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$.

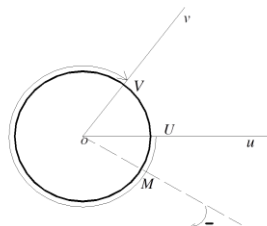
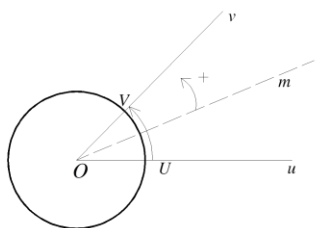
☞ **Lưu ý:** bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tổng quát: $sđ(Ou, Ov) = a^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$sđ(Ou, Ov) = \alpha^{\text{rad}} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2. Số đo cung lượng giác



Số đo của một cung lượng giác $\widehat{UV}$ là một số thực kí hiệu $sđ \widehat{UV}$

Số đo của cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π

Ta viết: $sđ \widehat{UV} = \alpha + k2\pi$

2.3. Số đo của góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) là số đo của cung lượng giác $\widehat{UV}$ tương ứng

2.4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm $A(1; 0)$ là điểm gốc của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M sao cho số đo cung AM bằng α

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Đổi số đo của các cung tròn sau thành số đo radian.

1. $a^\circ = 15^\circ$

$$\text{Ta có: } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{15 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$

2. $b^\circ = 22^\circ 30'$

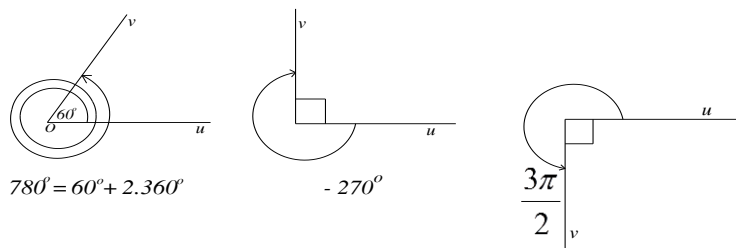
$$\Rightarrow b^\circ = 22^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{45^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{45}{2} \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{8}$$

Bài 2. Đổi số đo độ radian của các cung tròn sau thành số đo độ.

$$* \alpha = \frac{5\pi}{12} : \text{ta có } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180} \Rightarrow a = \frac{\frac{5\pi}{12} \cdot 180}{\pi} = 75^\circ$$

$$* \beta = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow a^\circ = \frac{-\frac{3\pi}{2} \cdot 180^\circ}{\pi} = -270^\circ.$$

Bài 3. Biểu diễn góc lượng giác của số đo: 780° , -270° , $\frac{3\pi}{2}$



BÀI TẬP

Bài 1. Điền vào các ô trống trong bảng sau đây:

Số đo độ	-30°	-240°			3100°	
Số đo radian			$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{16\pi}{3}$		$\frac{68\pi}{5}$

Bài 2. Coi kim giờ là tia Ou và kim phút là tia Ov . Hãy tìm số đo của các góc lượng giác $(Ou; Ov)$ khi đồng hồ chỉ: 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 10 giờ.

Bài 3. Chứng minh rằng:

- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.
- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là 645° và -435° thì có cùng tia cuối.
- Cho ngũ giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay kim đồng hồ). Tính số đo độ và radian của các cung lượng giác : $\widehat{A_0A_i}$, $\widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4. i \neq j$)

Bài 5. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo:

A. -90°

B. 1000°

C. $\frac{30\pi}{2}$

D. $-\frac{15\pi}{11}$

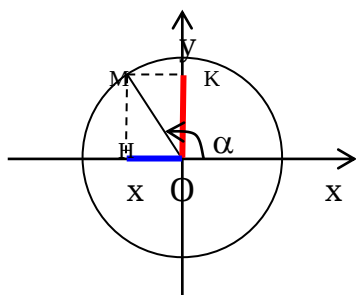
§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Giá trị lượng giác sin và cosin.

Cho $M(x,y)$ thuộc đường tròn lượng giác sao cho góc $(OA; OM) = \alpha$

a. Các định nghĩa



- Hoành độ x của điểm M là *côsin* của góc α
Ký hiệu: $\cos(OA, OM) = \cos \alpha = \overline{OH} = x$
- Tung độ y của điểm M là *sin* của góc α
Ký hiệu: $\sin(OA, OM) = \sin \alpha = \overline{OK} = y$
Trục Ox gọi là *trục sin*. Trục Oy là *trục côsin*.

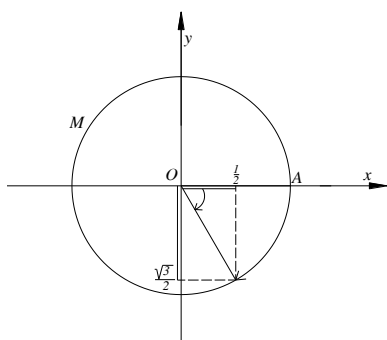
- Nếu $\cos \alpha \neq 0$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) thì tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là *tang* của góc α .
- Nếu $\sin \alpha \neq 0$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) thì tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là *côtang* của góc α .

$$\text{Ký hiệu: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

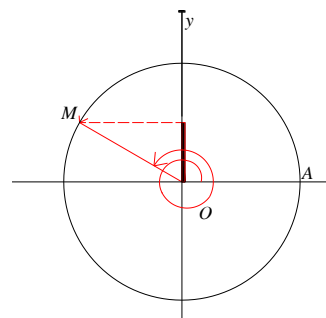
b. Tính chất

- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha; \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$, với $k \in \mathbb{Z}$
- $-1 \leq \cos \alpha \leq 1; -1 \leq \sin \alpha \leq 1$

Ví dụ 1:



$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

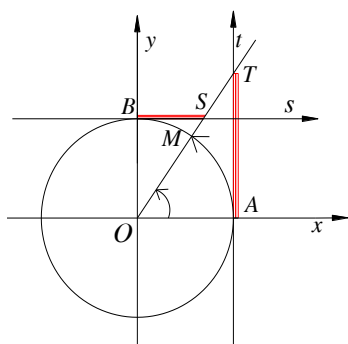


$$\begin{aligned} \sin 410^\circ &= \sin(150^\circ + 360^\circ) \\ &= \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Giá trị lượng giác của tang và côtang

a. Các định nghĩa

b. Ý nghĩa hình học



Cho đường tròn lượng giác. Vẽ trục số At và Bs là hai tiếp tuyến tại A và B (như hình vẽ). Một điểm $M(x; y)$ thuộc đường tròn sao cho $(OA, OM) = \alpha$. OM kéo dài cắt At tại T, cắt Bs tại S.

$$\tan \alpha = \overline{AT}; \quad \cot \alpha = \overline{BS}$$

□ Trục At: trục tang

□ Trục Bs: trục cotang

c. Tính chất:

$$* \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

$$* \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

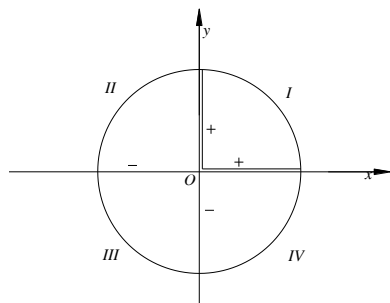
$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

3. Giá trị lượng giác một góc đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4. Dấu các hàm số lượng giác



Góc phần tư	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

5. Công thức lượng giác cơ bản

$$* \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

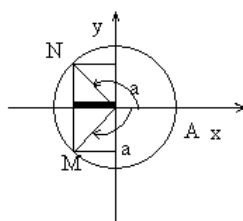
$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$* \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

7. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

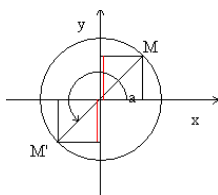
a/ Hai góc đối nhau



$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

$$\text{VD1: } \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

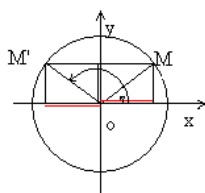
b/ Hai góc hơn kém nhau π



$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\text{VD2: } \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c/ Hai góc bù nhau



$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

Ví dụ 3: CMR: Trong ΔABC $\sin A = \sin(B+C)$

Giải

$$\text{Ta có: } A + B + C = \pi \Leftrightarrow B + C = \pi - A$$

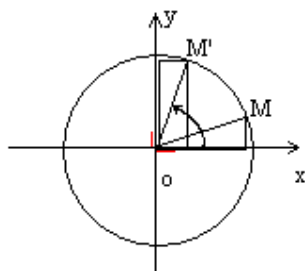
$$\Rightarrow \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A \text{ (đpcm)}$$

d/ Hai góc phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$



Ví dụ 4: CMR $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) &= \cos[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)] \\ &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính $\cos 390^\circ$; $\sin 420^\circ$

Giải

- $\cos 390^\circ = \cos(30^\circ + 360^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 420^\circ = \sin(60^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2. Cho $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Giải

$$\text{Ta có: } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{Vì: } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$\text{nên: } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Khi đó: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

Bài 3. Chứng minh đẳng thức sau: $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{VT} &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $\tan a = 3$. Tính $A = \frac{2\sin a + 3\cos a}{\sin a + 5\cos a}$

Giải

$$\text{Vì } \tan a = 3 \Rightarrow \cos a \neq 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{2\sin a}{\cos a} + \frac{3\cos a}{\cos a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{5\cos a}{\cos a}} = \frac{2\tan a + 3}{\tan a + 5} = \frac{2.3 + 3}{3 + 5} = \frac{9}{8}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$, $\tan \alpha$.

Bài 2. Cho $\tan \alpha = 3$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính các hàm số lượng giác còn lại.

Bài 3. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính các biểu thức:

$$A = \frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{\sin \alpha - 7\cos \alpha}, \quad B = \frac{2\cos^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3\sin^2 \alpha + 2}$$

Bài 4. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau

$$a / -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \quad b / k\pi \quad c / \frac{\pi}{2} + k\pi \quad d / \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 5. Đơn giản các biểu thức

$$\begin{aligned} a / \sqrt{\sin^4 a + \sin^2 a \cdot \cos^2 a} & \quad b / \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ c / \frac{1 - \sin^2 a \cdot \cos^2 a}{\cos^2 a} - \cos^2 a & \quad d / \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \end{aligned}$$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức

$$\begin{aligned} a / \cos^4 a - \sin^4 a &= 2\cos^2 a - 1 & b / 1 - \cot^4 a &= \frac{2}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin^4 a} \\ c / \frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} &= 1 + 2\tan^2 a & d / \cos^4 a + \sin^4 a &= 1 - 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a \end{aligned}$$

Bài 7. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

$$\begin{aligned} a / \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} & \quad b / 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x) \\ c / \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} & \quad d / (\cot x + \tan x)^2 - (\cot x - \tan x)^2 \end{aligned}$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau

$$\begin{aligned} a / \frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cdot \cos x & \quad b / \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \\ c / \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} & \quad d / (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + 1 - \cot^2 x \end{aligned}$$

Bài 9. Cho $\tan x = 5$. Tính:

$$A = \frac{5 + 3\sin x \cdot \cos x}{7\sin^2 x - \cos^2 x} \quad B = \frac{5\sin x + 3\cos^3 x}{2\sin^2 x \cdot \cos x + \cos x}$$

Bài 10. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x

$$a / 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x \quad b / \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

Bài 11. Chứng minh đẳng thức sau

$$\begin{aligned} a / \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x & b / \tan x \cdot \tan y &= \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} \\ c / \sin^2 a \cdot \tan a + \cos^2 a \cdot \cot a + 2\sin a \cdot \cos a &= \tan a + \cot a & d / \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \tan^2 a} &= \sin^2 a \cdot \cos^2 a \end{aligned}$$

Bài 12. Tìm x biết:

$$a/ \sin 2x = 1$$

$$b/ \cos 2x = -1$$

$$c/ 2\sin x - 1 = 0 \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$d/ 4\cos^2 x - 1 = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

Bài 13. Tìm GTLN-GTNN của cc hm số sau

$$a/ y = \sqrt{1 + \cos x} + 3$$

$$b/ y = 3\cos x + 4\sin x + 2$$

Bài 14. Tính

$$A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$$

$$B = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 180^\circ$$

$$C = \cos 315^\circ + \sin 330^\circ + \sin 250^\circ - \cos 150^\circ$$

Bài 15. Tính:

$$E = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$$

$$F = \sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$$

Bài 16. Rút gọn các biểu thức sau

$$a/ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$$

$$b/ 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$c/ \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$$

$$d/ \cos 250^\circ \cdot \tan(-672^\circ) \cdot \sin(-1050^\circ)$$

Bài 17. Chứng minh rằng:

$$a/ \frac{1 - 2\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$b/ \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$c/ 2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

$$d/ \frac{\sin a + \cos a - 1}{1 - \cos a} = \frac{2 \cos a}{\sin a - \cos a + 1}$$

Bài 18. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính:

$$a/ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$b/ \cos(\pi + \alpha)$$

$$c/ \tan(\pi - \alpha)$$

$$d/ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Bài 19. Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{(\cos 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$$

$$B = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$C = \sin 825^\circ \cdot \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \cdot \sin(-555^\circ) + \tan 155^\circ \cdot \tan 245^\circ$$

Bài 20. Chứng minh rằng A, B, C là ba góc trong ΔABC thì

$$a/ \sin\left(\frac{A+B+3C}{2}\right) = \cos C$$

$$b/ \tan\left(\frac{A+B-2C}{2}\right) = \cot \frac{3C}{2}$$



ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$.

Bài 2. Tính các giá trị lượng giác của góc $\frac{7\pi}{12}$.

Bài 3. Cho a, b là góc nhọn với $\cos a = \frac{15}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$. Tính $\sin(a - b)$, $\tan(a - b)$

Bài 4. Cho $\sin a = \frac{1}{3}$, $\sin b = \frac{1}{2}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Tính $\sin(a + b)$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a / \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$b / 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x = 8 \sin^4 x$$

$$c / 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = \cos 4x$$

$$d / 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos 2\alpha$$

$$e / \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha$$

$$f / \frac{1 + \sin 2a - \cos 2a}{1 + \sin 2a + \cos 2a} = \tan a$$

$$g / \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$$

❧ PHẦN HÌNH HỌC ❧

MỤC LỤC

trang

Chương I. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác	37
§2. Phương trình đường thẳng	43
§3. Phương trình đường tròn	51
§ 4. Phương trình đường elip	55
Ôn tập chương I.....	58

Chương II. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

§1. Phép biến hình. Phép tịnh tiến.....	59
§2. Phép đối xứng trục. Phép đối xứng tâm.....	62
§3. Phép đối xứng tâm.....	64
§4. Phép quay.....	66
§5. Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau.....	67.
§6. Phép vị tự.....	69
§7. Phép đồng dạng.....	70
Ôn tập chương II.....	71

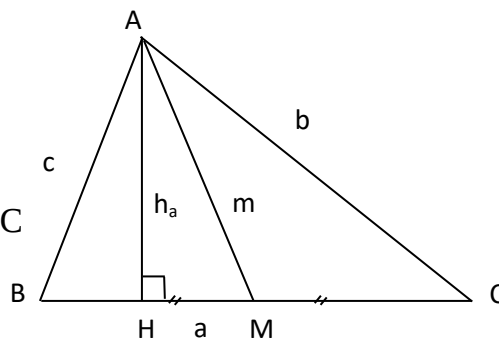
CHƯƠNG I. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT

§1. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các kí hiệu trong ΔABC

- Độ dài: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
- h_a, h_b, h_c : độ dài đường cao ứng với A, B, C
- m_a, m_b, m_c : độ dài trung tuyến ứng với A, B, C
- $p = \frac{a + b + c}{2}$: nửa chu vi ΔABC .
- S : Diện tích ΔABC .
- R, r : bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC .



2. Các định lí

2.1. Định lí côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

• **Hệ quả:** $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

• **Hệ quả:** $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

2.2. Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Ví dụ 1: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 8\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$. Tính a , độ dài trung tuyến m_a , bán kính đường tròn ngoại tiếp R của ΔABC .

Giải

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow a = 7(\text{cm})$
- $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2 \cdot 64 + 2 \cdot 25 - 49}{4} = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2} (\text{cm})$
- $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} (\text{cm})$

3. Công thức tính diện tích của ΔABC

$$\begin{aligned} 1. S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ 2. S &= \frac{1}{2}a.b.\sin C = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}a.c.\sin B \\ 3. S &= \frac{abc}{4R} \\ 4. S &= p.r \\ 5. S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông}) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $a = 7, b = 8, c = 5$. Tính $S, h_a, R, r, \hat{A}$.

Giải

- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+5}{2} = 10 \Rightarrow S = \sqrt{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = 10\sqrt{3}$
- $S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$
- $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
- $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$
- $S = \frac{1}{2}b.c.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{8 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

ĐẠNG 1: TÍNH MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC THEO MỘT SỐ YẾU TỐ CHO TRƯỚC

Phương pháp

- Áp dụng cho các định lý côsin, sin và các công thức tính diện tích.
- Chọn các công thức thích hợp để tính các yếu tố trung gian.

Bài 1. Cho ΔABC có $AB = 6, AC = 10, \hat{A} = 120^\circ$.

- Tính độ dài đường cao AH của ΔABC .
- Tính độ dài đoạn phân giác trong AD của ΔABC .
- Gọi I là điểm nằm trong ΔABC . Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AB, AC, BC . Tính $IE \cdot AB + IF \cdot AC + IK \cdot BC$

Giải

a. Tính độ dài đường cao AH của ΔABC

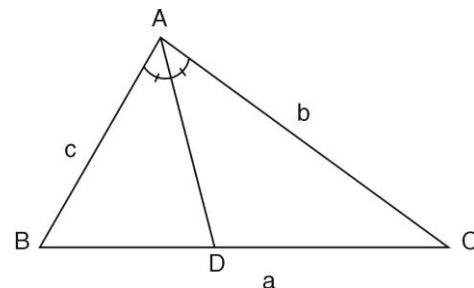
$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

$$\text{Trong } \Delta ABC \text{ ta có: } a^2 = b^2 + c^2 - 2ab.\cos A = 10^2 + 6^2 - 2.10.6 \cos 120^\circ$$

$$= 100 + 36 + 60 = 196 \Rightarrow a = 14$$

$$\text{Mặt khác: } S = \frac{1}{2}.10.6.\sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy: } h_a = \frac{2.15\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}$$



b. Tính độ dài đoạn phân giác trong AD của ΔABC

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.AD.\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin \frac{A}{2}.(AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{\sin \frac{A}{2}.(AB + AC)} = \frac{6.10.\sin 120^\circ}{\sin 60^\circ.(6 + 10)} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$$

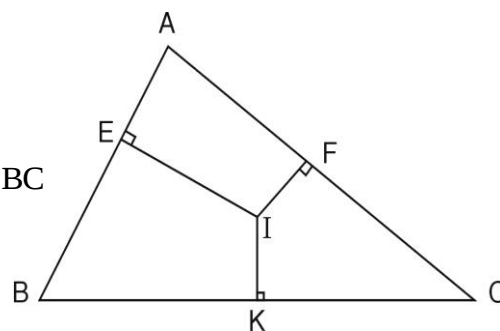
c. Tính: $IE.AB + IF.AC + IK.BC$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IAC} + S_{\Delta IBC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}IE.AB + \frac{1}{2}AC.IF + \frac{1}{2}IK.BC$$

$$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2}(IE.AB + AC.IF + IK.BC)$$

$$\Leftrightarrow IE.AB + IF.AC + IK.BC = 30\sqrt{3}$$



☞ DẠNG 2: GIẢI TAM GIÁC

☞ Phương pháp:

- Tìm các yếu tố còn lại của tam giác (góc, cạnh)

Bài 2:

a. Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 45^\circ$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$

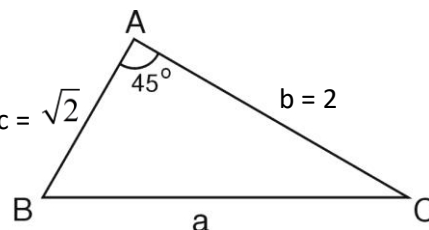
Giải

$$\bullet \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\bullet \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2 + 2 - 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow B = 90^\circ$$

$$\bullet \quad C = 180^\circ - (B + A) = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ \quad c = \sqrt{2}$$

$$b. \text{ Giải } \triangle ABC \text{ biết } a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$



Giải

$$\bullet \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + 8 - 2\sqrt{12} - 12}{2 \cdot 2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{4 \cdot 2(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$\bullet \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12 + 8 - 4\sqrt{3} - 8}{2 \cdot 2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ$$

$$\bullet \quad C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

$$c. \text{ Giải } \triangle ABC \text{ biết } \hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = 45^\circ, a = 5\sqrt{3}$$

Giải

$$\bullet \quad C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

$$\bullet \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\bullet \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sin 15^\circ = 10 \cdot \sin 15^\circ \approx 2.59$$

ĐẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ CỦA MỘT TAM GIÁC

Phương pháp

- Dùng các công thức thích hợp để biến đổi vế này thành vế kia hoặc biến đổi tương đương đưa về một đẳng thức đúng.
- Chú ý giả thiết và kết luận của bài toán để tìm hệ thức tương ứng thích hợp để biến đổi

Bài 3: Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$a. \quad b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$$

$$b. \quad \sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$$

Giải

$$a. \quad \text{CMR : } b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$$

$$\text{VP} = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B) = ab \cdot \cos C - ac \cdot \cos B$$

Trong ΔABC ta có : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow ab \cdot \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow ac \cdot \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$\text{Vậy : VP} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2} = b^2 - c^2 = VT \text{ (đpcm)}$$

b. CMR: $\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$ (*)

Trong ΔABC ta có : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{2a^2}{2a} = a \text{ (đúng)} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

DẠNG 4: NHẬN DẠNG MỘT TAM GIÁC

Phương pháp

- Biến đổi biểu thức đã cho về biểu thức có mối quan hệ giữa góc hay cạnh (bằng các công thức cosin, sin ...) để dựa vào đó kết luận.

Bài 4. Cho ΔABC có $ab \cdot \cos C + bc \cdot \cos A + ac \cdot \cos B = c^2$. ΔABC là tam giác gì?

Giải

Ta có: $ab \cdot \cos C + bc \cdot \cos A + ac \cdot \cos B = c^2$

$$\Leftrightarrow ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } C.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho ΔABC biết

a/ $a = 5, b = 6, c = 7$. Tính S, h_a, R, r, m_a .

b/ $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} - 1$. Tính $\hat{A}, B, C$.

c/ $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 8$, $c = 5$. Tính S , h_a , R , r , m_a

d/ $\hat{A} = 120^\circ$, $B = 45^\circ$, $R = 2$. Tính a , b , c

e/ $\hat{A} = 60^\circ$, $h_a = \sqrt{3}$, $R = 5$. Tính a , $b.c$

f/ $b = 4$, $c = 3$, $S = 3\sqrt{3}$. Tính a

Bài 2. Giải $\triangle ABC$ biết

a/ $c = 14$, $\hat{A} = 60^\circ$, $B = 40^\circ$

b/ $a = 7$, $b = 23$, $C = 130^\circ$

c/ $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 5$, $BD = 7$. Tính AC .

Bài 4. Chứng minh rằng: trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

Bài 5. CMR: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AC và BD . CMR :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có đường chéo $AC = m$, đường chéo $BD = n$.

CMR: diện tích tứ giác $ABCD$, $S = \frac{1}{2}.m.n.\sin\alpha$, với α là số đo góc giữa hai đường chéo AC và BD .

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $bc = a^2$. CMR:

a. $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$

b. $h_b \cdot h_c = h_a^2$

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có $b + c = 2a$. CMR:

a. $2\sin A = \sin B + \sin C$

b. $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Bài 10. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. CMR:

a. $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

b. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

c. $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$

d. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

e. Tìm tập hợp điểm M sao cho : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = K^2$ ($K \in \mathbb{R}$).

§2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình tham số của đường thẳng

1.1. Vector chỉ phương của đường thẳng

- **Định nghĩa.** Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là *vector chỉ phương của đường thẳng Δ* nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng Δ .
- **Nhận xét:** Nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của Δ thì $k \cdot \vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vector chỉ phương của Δ .

1.2. Phương trình tham số

Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vector chỉ phương

$\vec{u}(a; b)$ có phương trình tham số là :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t: \text{tham số})$$

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng Δ qua $M(2; 3)$ và có vector chỉ phương

$\vec{u} = (3; -5)$ là:
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$$

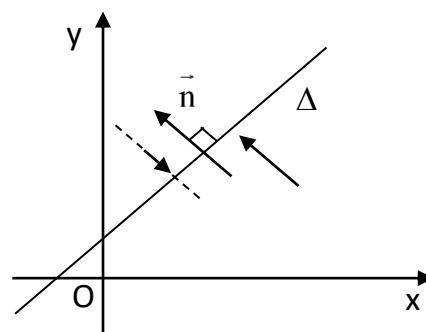
☞ **Chú ý:** Phương trình (Δ) :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ thì ta có : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (*)$ thì (*) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

2.1. Vector pháp tuyến của đường thẳng

- **Định nghĩa.** Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là *vector pháp tuyến của đường thẳng Δ* nếu góc của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .



- **Nhận xét:** - Nếu $\vec{n}$ là VTPT của Δ thì $k \cdot \vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của đường thẳng Δ .

$$\text{- Đường thẳng } \Delta \text{ được xác định nếu biết: } \begin{cases} M \in \Delta \\ \text{VTPT: } \vec{n}_\Delta \end{cases}$$

$$\text{- } \vec{a} = (x; y), \vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (y; -x) \text{ hay } \vec{b} = (-y; x)$$

2.2. Phương trình tổng quát

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + C = 0 (*) \quad (\text{với } C = -Ax_0 - By_0)$$

(*) được gọi là *phương trình tổng quát của Δ* .

Như vậy: Trong mặt phẳng Oxy, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát

$$Ax + By + C = 0, \text{ với } A^2 + B^2 \neq 0.$$

- **Chú ý:** Đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0 \Rightarrow$ VTPT: $\vec{n} = (A; B)$

Ví dụ 2: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

a/ (Δ) đi qua $M(2; 4)$ và có VTPT $\vec{n} = (-3; 5)$;

b/ (Δ) đi qua $A(3; 4)$ và song song đường thẳng (d): $2x - y + 1 = 0$.

Giải

a/ (Δ) đi qua $M(2; 4)$ và có VTPT $\vec{n} = (-3; 5)$:

$$\Rightarrow \text{PT: } a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x - 2) + 5(y - 4) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5y - 14 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ): $-3x + 5y - 14 = 0$

b/ (Δ) đi qua $A(3; 4)$ và song song đường thẳng (d): $2x - y + 1 = 0$

$$\text{Đường thẳng } (d): 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow \text{VTPT: } \vec{n}_d = (2; -1).$$

(Δ) qua $A(3; 4)$ và song song (d) nên nhận $\vec{n}_d = (2; -1)$ làm VTPT.

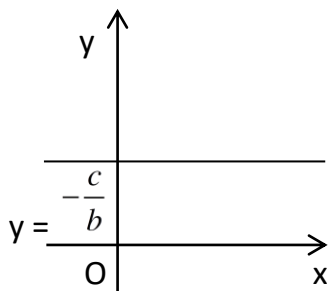
$$\Rightarrow \text{PT } (\Delta): 2(x - 3) - 1(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

$$\text{Vậy PT tổng quát } (\Delta): 2x - y - 2 = 0$$

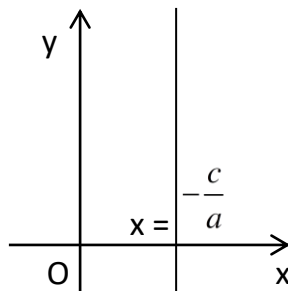
3. Các dạng đặc biệt của đường thẳng

Trong mpOxy cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

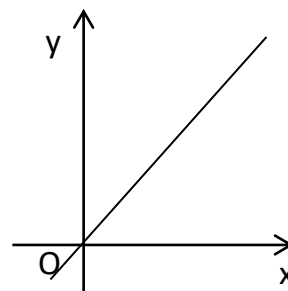
- Nếu $a = 0$ thì $(\Delta): by + c = 0$ hay $y = -\frac{c}{b}$ song song hoặc trùng Ox.
- Nếu $b = 0$ thì $(\Delta): ax + c = 0$ hay $x = -\frac{c}{a}$ song song hoặc trùng Oy.
- Nếu $c = 0$ thì $(\Delta): ax + by = 0$ đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$



$$\Delta: by + c = 0$$



$$\Delta: ax + c = 0$$



$$\Delta: ax + by = 0$$

4. Hệ số góc của đường thẳng

Cho đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$ (với $b \neq 0$)

$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Khi đó: $K = -\frac{a}{b}$ được gọi là hệ số góc của Δ .

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $(\Delta): 2x + 3y - 4 = 0$. Tìm hệ số góc của (Δ)

Giải

$$(\Delta): 2x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Vậy hệ số góc (Δ) là: $K = -\frac{2}{3}$.

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

1) (I) có 1 nghiệm $(x_0; y_0) \Leftrightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2 tại $M(x_0; y_0)$

2) (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$

3) (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$

☞ **Chú ý:** Nếu a_2, b_2, c_2 đều khác 0, ta có:

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ví dụ 4: Cho $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$; $\Delta_2: x - y - 1 = 0$; $\Delta_3: 2x - 2y + 2 = 0$. Xét vị trí tương đối của $d: x - y + 1 = 0$ với $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$.

Giải

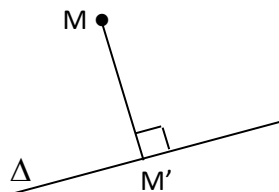
- Xét $d: x - y + 1 = 0$ và $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$. Ta có: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow d$ cắt Δ_1
- Xét $d: x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2: x - y - 1 = 0$. Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow d // \Delta_2$
- Xét $d: x - y + 1 = 0$ và $\Delta_3: 2x - 2y + 2 = 0$. Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow d \equiv \Delta_3$

6. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng

Trong mpOxy cho điểm $M(x_M; y_M)$ và đường thẳng $(\Delta): Ax + By +$

$C = 0$. Khoảng cách từ M đến Δ là:

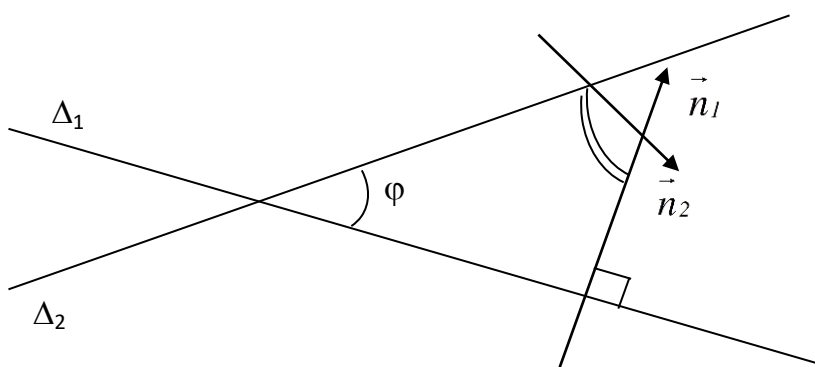
$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



7. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa. Cho 2 đường thẳng: $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$

$\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$



Gọi φ là góc giữa Δ_1 và Δ_2 thì φ được tính :

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

$$\text{Vậy: } \cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

☞ **Chú ý:** φ bằng hoặc bù với 2 vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của Δ_1 và Δ_2

$$\text{Do đó: } \varphi \text{ có thể tính theo công thức: } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tính khoảng cách từ điểm $M(3; 4)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$

Giải

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 2y + 2 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$$

Khoảng cách từ $M(3; 4)$ đến Δ là:

$$d(M, \Delta) = \frac{|3 - 2 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Bài 2: Cho ΔABC có phương trình các cạnh:

$$AB: x + y - 3 = 0; \quad AC: x + 10y + 15 = 0; \quad BC: 4x - 5y + 15 = 0$$

- Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC .
- Viết phương trình tổng quát các đường cao Δ .

Giải

- Tọa độ đỉnh $A = AB \cap AC$ nên là nghiệm hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 10y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(5; -2)$$

Tọa độ đỉnh $B = AB \cap BC$ là nghiệm của hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 4x - 5y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(0; 3)$$

Tọa độ đỉnh $C = AC \cap BC$ là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 10y + 15 = 0 \\ 4x - 5y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-1; -5)$$

Vậy các đỉnh của ΔABC là: $A(5; -2)$, $B(0; 3)$, $C(-1; -5)$

- b) Đường cao AH qua $A(5; -2)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (-5; -4)$ là VTPT
 $\Rightarrow$ PT (AH): $-5(x - 5) - 4(y + 2) = 0 \Leftrightarrow -5x - 4y + 17 = 0$

Đường cao BK và CE tương tự.

BÀI TẬP

Bài 1. Viết PT tham số của đường thẳng (d) biết :

- (d) qua $A(3; 4)$ và có VTCP: $\vec{u} = (7; 3)$;
- (d) qua $B(-2; 1)$ và có VTPT: $\vec{n} = (3; -2)$;
- (d) đi qua $M(4; -1)$, $N(0; 3)$;
- (d) có hệ số góc $k = 2$ và đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Bài 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) biết:

- (Δ) qua $M(3; 1)$ và có VTPT $\vec{n} = (-3; 4)$;
- (Δ) qua $A(4; -5)$ và song song (d) : $2x - 5y + 1 = 0$;
- (Δ) qua $A(-2; 1)$ và vuông góc với MN biết $M(3; 0)$ và $N(2; -1)$;
- (Δ) là đường trung trực của đoạn AB với $A(3; -2)$, $B(1; 0)$.

Bài 3. Cho ΔABC có $A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(5; 4)$. Viết phương trình tổng quát các đường cao của ΔABC .

Bài 4. Viết phương trình tổng quát của:

- Đường thẳng Ox
- Đường thẳng qua $M(3; 4)$ và song song Ox
- Đường thẳng Oy
- Đường thẳng qua $N(-2; 4)$ và song song Oy .

Bài 5. Cho $A(3; 4)$ và $B(5; 2)$.

- Viết phương trình tổng quát đường thẳng vuông góc với AB tại A .
- Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB .

Bài 6. Xét vị trí tương đối của 2 đường thẳng sau:

- $\Delta_1: 2x - 5y + 3 = 0$ và $\Delta_2: 5x + 2y - 3 = 0$

b) $\Delta_1: x - 3y + 4 = 0$ và $\Delta_2: 0,5x - 1,5y + 4 = 0$

c) $\Delta_1: 10x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 5x + y - 1,5 = 0$

Bài 7. Cho ΔABC có đường cao AH: $2x + y - 4 = 0$, đường cao BH: $x - y - 2 = 0$ và AB: $7x - y + 4 = 0$. Viết phương trình tổng quát các cạnh AC, BC.

Bài 8. Cho ΔABC có 2 đường cao: BH : $2x + y - 4 = 0$ và CH: $7x - y + 4 = 0$ và điểm A(-3; 2). Tìm phương trình các cạnh AB, AC, BC.

Bài 9. Cho ΔABC có A(1; 2), B(4; -3), C(0; -2). Viết PT tham số, tổng quát của:

- Các cạnh AB, AC, BC;
- Các đường cao AH, BK, CE;
- Các đường trung tuyến AM, BN, CF.

Bài 10. Viết PT đường thẳng (Δ) biết:

- (Δ) song song với (d) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ và qua M(3; -5) ;
- (Δ) qua O(0; 0) và vuông góc (d) : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3t \end{cases}$;
- (Δ) qua N(1; 1) và song song trục Ox ;
- (Δ) qua A(-2; 1) và vuông góc trục Oy ;
- (Δ) qua B(-2; -3) và song song (d) : $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$.

Bài 11. Cho $d_1: 2mx + (m - 3)y + 4m - 1 = 0$ và $d_2: (m - 1)x + (m + 2)y + m - 2 = 0$

- Định m để $d_1 \perp d_2$.
- Định m để $(d_1, d_2) = 45^\circ$

Bài 12. Cho ΔABC có 3 cạnh AB: $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$; AC : $\sqrt{3}x + y + 11 = 0$

và BC: $x - y - 10 = 0$. CMR: ΔABC cân.

Bài 13. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0 \text{ và } \Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0$$

Bài 14. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(2 ; 5) và cách đều 2 điểm: A(-1; 2), B(5 ; 4)

Bài 15. Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $d_1: x - 3y + 9 = 0$ và $d_2: 2x - y - 2 = 0$

b) $d_1: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 6t \end{cases};$

c) $d_1: 7x - y + 5 = 0$ và $d_2: 4x + 3y - 8 = 0;$

d) $d_1: 2x + 5y - 7 = 0$ và $d_2: 3x - 7y + 8 = 0;$

e) $d_1: (m + 1)x + (m - 1)y - 7 = 0$ và $d_2: x + my + 1 = 0.$

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình đường tròn

- Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$,

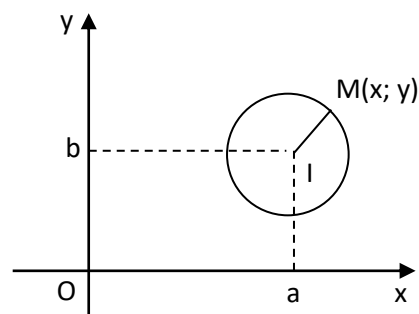
bán kính R là: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

- Ngược lại phương trình:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$

là phương trình của đường tròn tâm $I(a; b)$

và bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

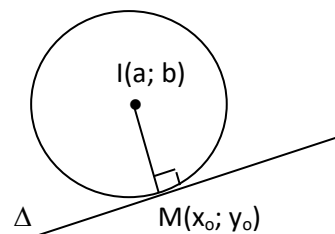


2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

- Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$

của đường tròn tâm $I(a; b)$ là:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$



Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C):

$$(x - 2)^2 + (y + 3) = 1 \text{ tại } M(3; -3)$$

Giải

PTTT của đường tròn (C) tâm $I(2; -3)$ tại $M(3; -3)$ là:

$$(3 - 2)(x - 3) + (-3 + 3)(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

✎ Dạng 1: Nhận dạng phương trình đường tròn

☞ Cách 1:

- Đưa phương trình về dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1)

- Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì (1) là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

☞ Cách 2:

- Đưa phương trình về dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = m$ (2)

- Nếu $m > 0$ thì (2) là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{m}$.

Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của đường tròn.

Tìm tâm và bán kính (nếu có) ?

$$a) x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$$

$$c) 2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$$

$$b) x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

Giải

$$a) x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 = 0 \quad (1)$$

Ta có: $a = 2, b = -1, c = 7$

$$a^2 + b^2 - c = 4 + 1 - 7 = -2 < 0$$

Vậy (1) không phải là phương trình của đường tròn.

$$b) x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \quad (2)$$

Ta có: $a = -1, b = 3, c = -15$

$$a^2 + b^2 - c = 1 + 9 + 15 = 25 > 0$$

Vậy (2) là phương trình của đường tròn tâm $I(-1; 3)$,

$$\text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{25} = 5$$

$$c) 2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0 \quad (3)$$

Ta có: $a = 1, b = -1, c = -1$

$$a^2 + b^2 - c = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$$

Vậy (3) là phương trình của đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$ (1).

Tìm m để (1) là phương trình của đường tròn.

Giải

$$\text{Phương trình: } x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0 \quad (1)$$

Với $a = m, b = -2m, c = 6m - 1$

$$(1) \text{ là phương trình của đường tròn } \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy: $m < \frac{1}{5}$ ∨ $m > 1$ thì (1) là phương trình đường tròn.

Dạng 2: Lập phương trình đường tròn

Cách 1:

- Tìm tâm $I(a; b)$ của đường tròn (C).
- Tìm bán kính R của (C).
- Viết phương trình (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Cách 2:

- Gọi phương trình của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0(*)$
- Từ điều kiện đề bài đưa về hệ phương trình với ẩn a, b, c .
- Giải hệ tìm a, b, c rồi thế vào (*).

Bài 3. Viết phương trình đường tròn (C) biết:

a/ Tâm $I(3; 1)$ và qua $A(4; 2)$

b/ Qua 3 điểm $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3)$

Giải

a/ Đường tròn (C) tâm $I(3; 1)$ và qua $A(4; 2)$ nên có bán kính:

$$R = IA = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

⇒ Phương trình đường tròn (C) : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$

b/ (C) qua A, B, C. Gọi (C) : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Vì (C) qua $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4 - 2a - 4b + c = 0 \\ 25 + 4 - 10a - 4b + c = 0 \\ 1 + 9 - 2a + 6b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - c = 5 \\ 10a + 4b - c = 29 \\ 2a - 6b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy (C): $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

BÀI TẬP

Câu 1. Xác định tâm và tính bán kính của các đường tròn sau (nếu có):

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 8x + y - 24 = 0$

b) $x^2 + y^2 - x + y + 10 = 0$

d) $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1$

Câu 2. Viết phương trình đường tròn (C) biết:

a) (C) qua A(3; 1) và có tâm I(1; -3).

b) Tâm I(2; -1) và tiếp xúc (Δ) : $3x + 4y - 4 = 0$

c) Qua A(1 ; 4), B(0 ; 1) và có tâm nằm trên đường thẳng d: $2x - y - 2 = 0$

Câu 3. Cho (C): $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 2my + 3m^2 - 2 = 0$

a) Tìm m để (C) là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm của đường tròn (C).

Câu 4. Cho (C_m): $x^2 + y^2 - mx - 4y - m + 2 = 0$

a) CMR: (C_m) luôn là đường tròn.

b) Tìm m để (C_m) có bán kính $R = \sqrt{130}$.

Câu 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết:

a) (C): $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ và song song đường thẳng (d): $3x - y + 1 = 0$

b) (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ và tiếp tuyến vuông góc (d): $3x - y + 6 = 0$

c) (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và tiếp tuyến đi qua A(3; -2).

§4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

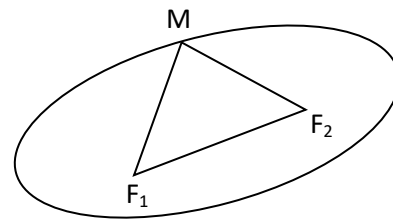
1. Định nghĩa đường elip

Cho 2 điểm F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$)

Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho:

$F_1M + F_2M = 2a$ (a là số cho trước lớn hơn c).

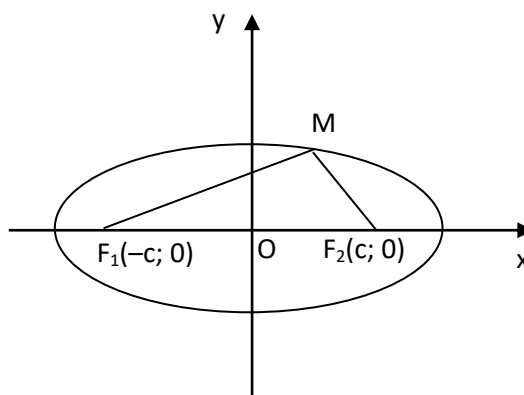
- F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm.
- $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự.



2. Phương trình chính tắc của elip

Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } c^2 = a^2 - b^2$$



3. Các yếu tố của elip

(E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 - b^2$

- Tiêu điểm: $F_1(-c, 0); F_2(c, 0)$
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
- Tọa độ đỉnh: $A_1(-a, 0); A_2(a, 0); B_1(0, -b); B_2(0, b)$
- Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$
- Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$
- Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$

4. Bán kính quan tiêu

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M; \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Xác định các yếu tố của elip

Phương pháp: Từ phương trình chính tắc của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

xác định a, b, c . Từ đó suy ra các yếu tố của elip.

Bài 1. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Xác định tọa độ tiêu điểm, tọa độ đỉnh, độ dài các trục và tâm sai của elíp.

Giải

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \text{ Ta có: } \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$$

- Tiêu điểm : $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$
- Đỉnh $A_1(-5; 0), A_2(5; 0), B_1(0; -3), B_2(0; 3)$
- Độ dài trục lớn: $2a = 10$, độ dài trục bé: $2b = 6$.
- Tâm sai: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

2. Lập phương trình chính tắc của elíp

Phương pháp: + Tìm mối quan hệ của đề bài xác định a, b , với $a > b > 0$.

+ Viết phương trình chính tắc của elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của elíp biết:

- Độ dài trục lớn bằng 10, và tiêu cự bằng 6.
- Một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và qua $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$

Giải

- Ta có : $2a = 10 \Rightarrow a = 5$
 $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$$\text{Mà } b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của elíp (E): } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- Phương trình chính tắc của elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Vì (E) qua } M(1; \frac{\sqrt{3}}{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Tiêu điểm của (E): } F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$\text{Mà } a^2 = c^2 + b^2 = 3 + b^2 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{3+b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1$

$$b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$$

Vậy phương trình chính tắc của elíp (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

BÀI TẬP

Câu 1. Xác định độ dài trục lớn, nhỏ, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elíp sau:

a) (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

c) (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$

b) (E) : $x^2 + 4y^2 = 16$

d) (E) : $x^2 + 4y^2 = 1$

Câu 2. Viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 26, tâm sai $e = \frac{5}{13}$

b) Tiêu điểm $F_1(-6; 0)$, tâm sai $e = \frac{2}{3}$

c) Qua $M(-2; \frac{5}{3})$ và có 1 tiêu điểm $F_2(2; 0)$

d) Qua $A(-3; 2)$ và $B(4; -\frac{3}{2})$

Câu 3. Xác định elíp (E) biết:

a) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông và tiêu cự bằng 10.

b) Mỗi tiêu điểm nhìn 2 đỉnh trên trục nhỏ góc 60° và $F_2(4; 0)$

c) Trục nhỏ bằng tiêu cự và diện tích hình chữ nhật cơ sở là 400.

Câu 4. Cho $(C_1) : x^2 + y^2 - 6x - 72 = 0$, $(C_2) : x^2 + y^2 + 6x = 0$

a) CMR : 2 đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

b) Một đường tròn thay đổi tâm M luôn tiếp xúc với (C_1) và (C_2) . CMR : tập hợp điểm M là 1 elíp.

Câu 5. Cho (E) : $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Tính tích khoảng cách từ 2 tiêu điểm đến $\Delta : x + y + 5 = 0$.

Câu 6. Cho elíp (E) : $x^2 + 4y^2 = 20$ và điểm $A(0; 5)$.

a) Xác định tiêu cự, tâm sai của elíp.

- b) (D) là đường thẳng qua A và có hệ số góc k. Giả sử (D) cắt (E) tại M, N. Gọi I là trung điểm MN. CMR: tập hợp I là elíp. Tìm phương trình elíp đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho ΔABC có AB: $x + y - 4 = 0$; AC: $x - 3y - 8 = 0$ và BC: $3x - y = 0$

- Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC ;
- Viết phương trình đường tròn tâm A và tiếp xúc BC.

Bài 2. Cho ΔABC có A(3; 5), B(2 ; 3), C(6 ; 2).

- Viết phương trình các cạnh AB, AC, BC;
- Viết phương trình đường cao AH, BK, CE;
- Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm A, B, C.

Bài 3. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$.

- Xác định tâm và tính bán kính đường tròn (C);
- Viết PTTT của (C) biết tiếp tuyến song song với (d) : $3x - y + 1 = 0$.

Bài 4. Viết phương trình đường tròn (C) biết :

- Đi qua A(1 ; 2), B(3 ; 4) và tiếp xúc đường thẳng $\Delta : 3x + y - 3 = 0$;
- Đi qua A(-5 ; 8), B(-4 ; 1) và tiếp xúc Oy ;
- Tâm I(-4 ; -5) tiếp xúc Oy;
- Qua A(1; 3), B(5; 1) có tâm nằm trên Ox.

Bài 5. Viết phương trình chính tắc của elíp biết:

- Độ dài của trục lớn bằng 8, tiêu cự bằng 6;
- Tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10;
- Độ dài 2 trục lớn bằng 26 và tâm sai $e = \frac{12}{13}$.
- Qua $M(1; 0)$ và $N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$.

CHƯƠNG II. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH. PHÉP TỊNH TIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép biến hình. Phép biến hình F trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng xác định được duy nhất một điểm M' của mặt phẳng, điểm.

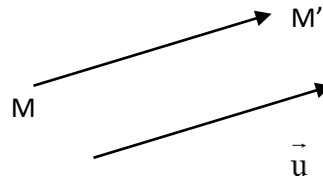
Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F

Ví dụ 1: Phép chiếu vuông góc.

Kí hiệu: Nếu phép biến hình F biến điểm M thành M' ta viết $F(M) = M'$.

2. Phép tịnh tiến

2.1. Định nghĩa. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$ là phép dời hình biến M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



Kí hiệu: Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$ được ký hiệu $T_{\vec{u}}(M) = M'$

2.2. Tính chất

- Phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $M'N' = MN$.
- Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng nó, góc thành góc bằng nó.

2.3. Biểu thức tọa độ

Cho $\vec{u} = (a, b)$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến $M(x, y)$ thành $M'(x', y')$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(2;1)$. Tìm ảnh của A qua phép tịnh tiến véc tơ $\vec{v} = (1;3)$.

Giải

$$T_{\vec{v}}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a = 2 + 1 = 3 \\ y' = y + b = 1 + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(3,4)$$

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) tâm I (1,-2), bán kính R = 5.

a) Viết phương trình đường tròn (C)

b) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (3;2)$

Giải

a) Đường tròn (C) tâm I (1,-2), bán kính R = 5.

$$\text{Phương trình đường tròn: } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$\text{b) } T_{\vec{v}}(I) = (I') : \begin{cases} x' = x + 3 = 1 + 3 = 4 \\ y' = y + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(4,0)$$

$$\text{Phương trình đường tròn (C'): } (x - 4)^2 + y^2 = 25.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh các điểm $A(2;1)$; $B(2;1)$; $C(1;3)$; $D(3;4)$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (1;3)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$ biến điểm $A(1;3)$ thành $B(-3;2)$. Tìm $\vec{v}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của tâm đường tròn $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (1;3)$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của tâm đường tròn $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 9$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{AB}$ với $A(2;1)$, $B(0;-2)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của trọng tâm tam giác ABC với $A(2;1)$; $B(-3;2)$; $C(5;2)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{BC}$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh trung điểm của các cạnh tam giác ABC với $A(2;1)$; $B(2;1)$; $C(1;3)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2;1)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $x + y + 4 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng (d') là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (1; 2)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng (D) là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (3; 2)$.

Bài 9. Trong mặt phẳng oxy cho các điểm $A(0; 2)$, $B(-3; 5)$, đường thẳng $d: 3x - 2y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

a) Tìm ảnh của A , B và đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (2; 1)$

b) Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{AB}$.

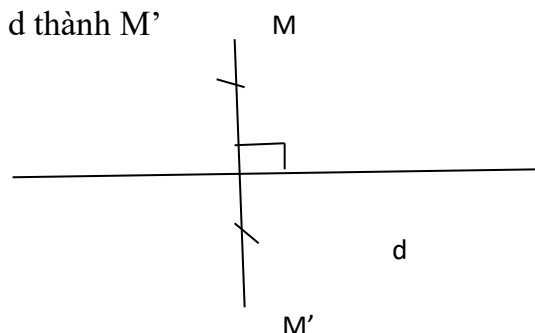
§2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho đường thẳng d . Phép biến hình F biến mỗi điểm

M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MM' .

Phép biến hình đó được gọi là *phép đối xứng qua đường thẳng d* . Kí hiệu: $\mathcal{D}_d$



2. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy,

- Phép đối xứng qua trục Ox biến $M(x, y)$ thành $M'(x', y')$ với

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$
- Phép đối xứng qua trục Oy biến $M(x, y)$ thành $M'(x', y')$ với

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm tọa độ ảnh của các điểm $A(1, 2)$; $B(-2, 3)$.

- Qua trục Ox;
- Qua trục Oy.

Giải

a) $\mathcal{D}_{Ox}(A) = A'$

Biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(1, -2)$

$\mathcal{D}_{Ox}(B) = B'$

Biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2, -3)$

b) $\mathcal{D}_{Oy}(A) = A''$

Biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow A''(-1, 2).$

$\mathcal{D}_{Oy}(B) = B''$

Biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \Rightarrow B''(2, 3).$

3. Tính chất

- Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Phép đối xứng trục biến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

4. Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng d được gọi là *trục đối xứng của hình H* nếu phép đối xứng qua d biến H thành chính nó. Khi đó, H là hình có trục đối xứng.

Ví dụ 2. Hình tròn có trục đối xứng là đường kính.

BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(2;3)$; $B(3;2)$; $B(2;-3)$; $C(3;-2)$; $D(-2;3)$. Tìm ảnh của các điểm trên qua phép đối xứng trục Ox.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(2;3)$; $B(-3;2)$; $C(2;-3)$; $D(3;-2)$; $E(-2;3)$. Tìm ảnh của các điểm trên qua phép đối xứng trục Oy.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 1 = 0$. Tìm phương trình d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 1 = 0$; $d_2: 4x - 2y + 3 = 0$; $d_3: y = 5x - 3$. Tìm phương trình ảnh của các đường thẳng trên qua phép đối xứng trục Ox và trục Oy.

Bài 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm ảnh của tâm đường tròn: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ qua phép đối xứng trục Ox và trục Oy.

Bài 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm ảnh của đường tròn: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 10$ qua phép đối xứng trục Ox và trục Oy.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

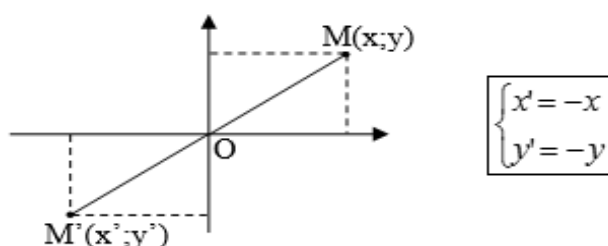
1. Định nghĩa. Cho điểm I . Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng tâm I* . Kí hiệu $\mathcal{D}_I$.

Ví dụ 1:



2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Trong hệ tọa độ Oxy cho $M(x,y)$, $M' = \mathcal{D}_O(M) = (x',y')$, khi đó



Biểu thức trên được gọi là *biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ*.

Ví dụ 2: Tìm tọa độ ảnh của các điểm $A(1,2)$; $B(-2,3)$ qua phép đối xứng tâm O .

Giải

$$\mathcal{D}_O(A) = A'$$

$$\text{Biểu thức tọa độ: } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-1, -2)$$

$$\mathcal{D}_O(B) = B'$$

$$\text{Biểu thức tọa độ: } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = -3 \end{cases} \Rightarrow B'(2, -3).$$

3. Tính chất

- Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Phép đối xứng trục biến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

4. Tâm đối xứng của một hình

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến H thành chính nó. Khi đó, H là hình có tâm đối xứng.

Ví dụ: Hình tròn có tâm đối xứng là tâm hình tròn.

BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(2;3); B(3;2) ; B(2;-3); C (3;-2); D(-2; 3).

a) Tìm ảnh của các điểm trên qua phép đối xứng tâm O;

b) Tìm ảnh của các điểm trên qua phép đối xứng tâm I(1,0).

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 1 = 0$. Tìm phương trình d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 1 = 0$;

$d_2: 4x - 2y + 3 = 0$; $d_3: y = 5x - 3$. Tìm phương trình ảnh của các đường thẳng trên qua phép đối xứng I(1,1).

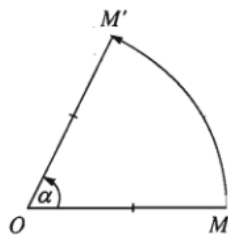
Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm ảnh của tâm đường tròn: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ qua phép đối xứng tâm O.

§4. PHÉP QUAY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác (OM, OM') bằng α được gọi là *phép quay tâm O góc α* . Kí hiệu $Q_{(O, \alpha)}$.

Điểm O gọi là *tâm quay*, còn góc α gọi là *góc quay*.



2. Tính chất

- Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình vuông ABCD tâm O .

- Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90°
- Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90°

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng d có phương trình:

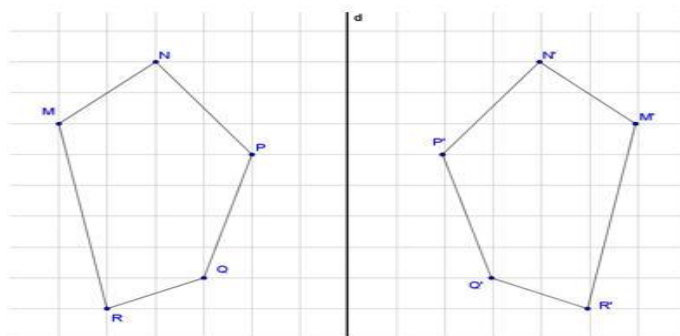
$x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90°

§5. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

$$F \text{ là phép dời hình: } \begin{cases} F(M) = M' \\ F(N) = N' \end{cases} \Leftrightarrow MN = M'N'$$



Hình 1.39 b

2. Tính chất

Phép dời hình:

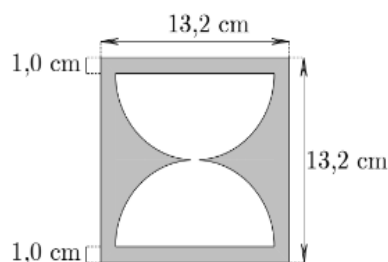
- Biến 3 điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Khái niệm hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.



Hình 1.47



BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(2;3)$; $B(3;2)$

- a) Tìm ảnh của các điểm trên qua hai phép biến hình liên tiếp đó là phép đối xứng tâm O và phép đối xứng trục Ox.
- b) Hỏi phép biến hình trên có phải là phép dời hình không?

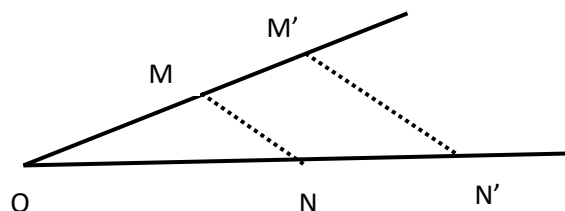
Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 1 = 0$.

- a) Tìm phương trình d' là ảnh của d qua 2 phép biến hình liên tiếp đó là phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2;1)$.
- b) Hỏi phép biến hình trên có phải là phép dời hình không?

§6. PHÉP VỊ TỰ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho điểm O và tỉ số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là *phép vị tự tâm O , tỉ số k* . Kí hiệu: $V_{(O,k)}$



2. Tính chất

• Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành hai điểm M', N'

thì $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$;

• Phép vị tự biến 3 điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng ;

• Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng;

Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó

• Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k| \cdot R$.

BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2;3)$; $B(3;2)$; $B(2;-3)$; $C(3;-2)$; $D(-2;3)$

a) Tìm ảnh của các điểm trên qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$;

b) Tìm ảnh của các điểm trên qua phép vị tự tâm $I(1,0)$ tỉ số $k = -1$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Tìm phương trình d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 1 = 0$; $d_2: 4x - 2y + 3 = 0$; $d_3: y = 5x - 3$. Tìm phương trình ảnh của các đường thẳng trên qua phép vị tự tâm $I(0,1)$ tỉ số $k = 1$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$.

a) Tìm ảnh của tâm đường tròn qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$;

b) Tìm ảnh của đường tròn qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) là phép biến hình F biến hai điểm bất kì M, N thành hai điểm M', N' sao cho $M'N' = kMN$.

Nhận xét: • Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$

• Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$

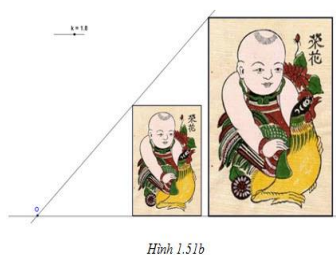
2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k :

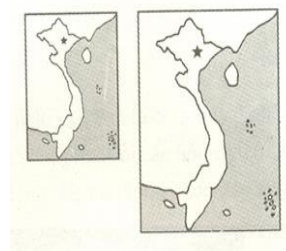
- Biến 3 điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $k.R$

3. Hình đồng dạng

Định nghĩa. Hai hình gọi là *đồng dạng với nhau* nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.



Hình 1.51b



BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC . Xác định ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$. AC và BD cắt nhau tại I . Gọi H, K, L, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC, IC . Chứng minh hai hình thang $JKLI$ và $IHD C$ đồng dạng với nhau

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(1;1)$ và đường tròn tâm I bán kính $R = 2$. Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc 45° và phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

- Qua phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{AB}$;
- Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE;
- Qua phép quay tâm O góc 120° .

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(-1; 2) và đường thẳng d có phương trình: $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d

- Qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (2; 1)$;
- Qua phép đối xứng trục Oy;
- Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ;
- Qua phép quay tâm O góc 90° .

Bài 3. Tìm toạ độ của điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(3; 2)$ qua phép tịnh tiến vector $\vec{v} = (-4; 1)$.

Bài 4. Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến vector $\vec{v}$, biết:

- (d): $x + 2y - 13 = 0$ và $\vec{v} = (1; 1)$.
- (d): $2x - y - 1 = 0$ và $\vec{v} = (2; -1)$.

Bài 5. Cho ΔABC biết A(1; 3), B(5; 1), C(-3; -1).

- Tìm toạ độ điểm H là trực tâm của ΔABC .
- Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

Bài 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(3; -2), bán kính 3.

- Viết phương trình của đường tròn đó.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (-2; 1)$.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng qua trục Ox.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

Bài 7. Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ) biết:

- (d): $3x + 2y - 3 = 0$ và (Δ): $2x - y = 0$.
- (d): $2x - 3y + 1 = 0$ và (Δ): $2x - y + 1 = 0$.

Bài 8. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d) biết:

- (C): $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ và (d): $y - 3 = 0$
- (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ và (d): $x - 2 = 0$.

